Extremwertaufgaben Teil 3:

Aufgabe 1:Kraftstoffverbrauch eines PKW

Der Kraftstoffverbrauch eines PKW (in Liter je 100 km) lässt sich in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in $\frac{km}{h}$) im 4-ten Gang näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = 0,0017x^2 - 0,18x + 10,2 \quad (x \geq 30)$ beschreiben.

Bei welcher Geschwindigkeit ist der Verbrauch am geringsten? Wie groß ist dieser?

Beschreibe den Lösungsweg:

Es muss das lokale Minimum der Funktion f bestimmt werden, d.h. die Nullstellen der ersten Ableitung werden in die zweite und in die Ausgangsfunktion eingesetzt.

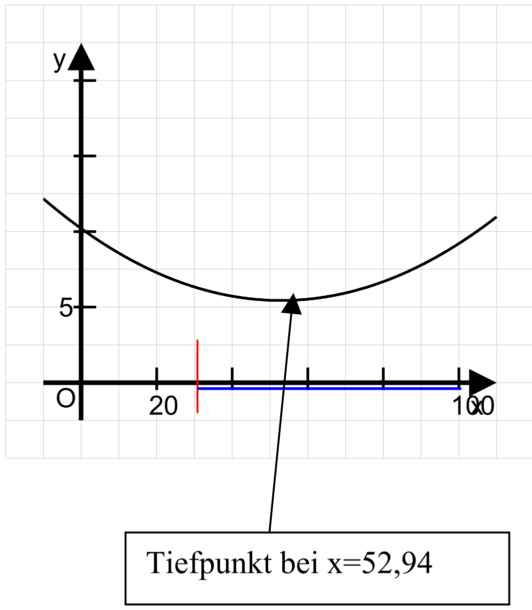
$f'(x) = 0$

$0,0034x - 0,18 = 0$

$f''(52,94) = 0,0034 \succ 0 \Rightarrow f\,hat \quad bei\ x = 52,94\ ein\,lok.\ Minimum$

$\underline{\underline{x = 52,94}}$

Der Minimale Verbrauch von 5,44 Litern auf 100 km/h wird bei einer Gescwindigkeit von 52,94 km/h erreicht.



Aufgabe 2: Umsatz eines Unternehmens

Der Umsatz eines Unternehmens lässt sich näherungsweise durch die Funktion $U(t) = 0,15t^3 - 2t^2 + 200 \quad (0 < x \leq 12)$ (t in Monaten, U in Millionen €) beschreiben.

a) In welchem Monat war der Umsatz am geringsten?
b) In welchem Monat verzeichnete das Unternehmen den stärksten Umsatzrückgang?

Lösungsweg:

a) **Bestimme das Minimum der Funktion f (s.o.)**

$U'(t) = 0$

$0{,}45t^2 - 4t = 0$

$t(0.45t - 4) = 0 \qquad U''(0) = -4 \prec 0 \Rightarrow U \quad hat \quad bei\ x = 0\ ein\ lok.\ Maximum$

$t = 0 \vee t = 8{,}89 \qquad U''(8{,}89) = 4 \succ 0 \Rightarrow f\ hat \quad bei\ x = 8{,}89 ein\ lok.\ Minimum$

der Umsatz ist bei t= 8,89, also nach 8,89 Monaten am geringsten.

b) Bestimme die Wendestelle von U

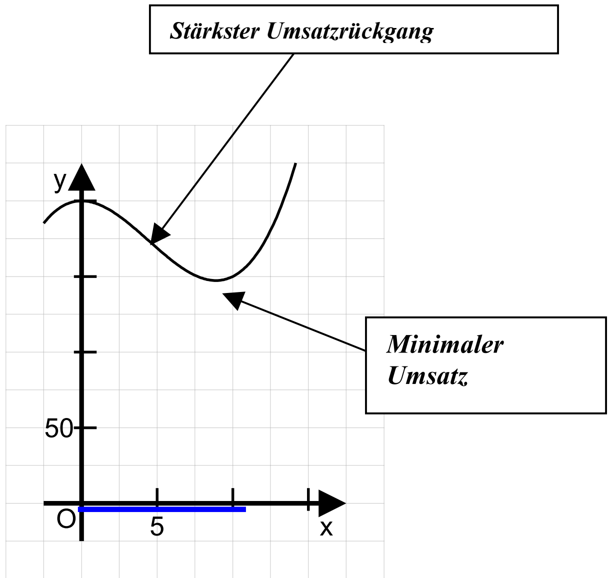
$U''(t) = 0$

$0{,}9t - 4 = 0$

$t = 4{,}44$

$U'''(4{,}44) = -4 \neq 0 \Rightarrow Wendestelle$

Der stärkste Rückgang des Umsatzes war nach t=4,44 Monaten.



Aufgabe 3: »Gateway-Arch«

Der Innenbogen des »Gateway-Arch« in St. Louis (USA) lässt sich näherungsweise durch die Funktion

$f(x) = 187{,}5 - 1{,}579 \cdot 10^{-2} x^2 - 1{,}988 \cdot 10^{-6} x^4$

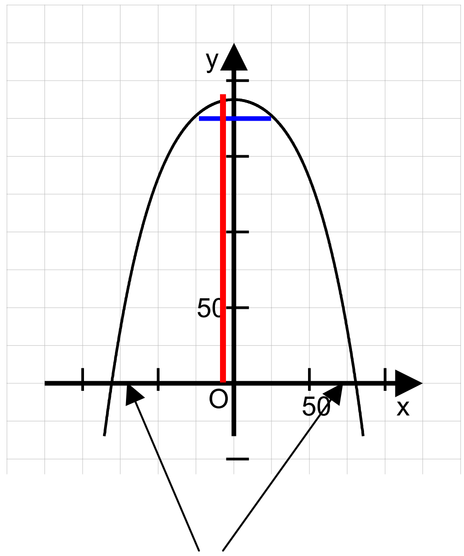
(x in m) beschreiben.

a) Berechne die Höhe und die maximale Breite des Innenbogens.

b) Wie groß sind die Winkel, die der Innenbogen mit der Grundfläche bildet?

c) Bei einer Flugveranstaltung soll ein Flugzeug mit einer Spannweite von 18m unter dem Bogen durchfliegen. Welche Maximalflughöhe muss der Pilot einhalten, wenn er einen Sicherheitsabstand von 10 Metern zu beiden Seiten des Bogens einhalten will?

Lösungsweg: a



Die Funktion ist symmetrisch zur f(x)-Achse. Deshalb muss der Punkt (0/187,5) die höchste Stelle sein.

Nullstellen von f:

$$f(x) = 187{,}5 - 1{,}579 \cdot 10^{-2} x^2 - 1{,}988 \cdot 10^{-6} x^4$$

$$187{,}5 - 0{,}01579x^2 - 0{,}000001988x^4 = 0$$

$$x^4 + 7942{,}7x^2 - 94315895{,}4 = 0$$

$$Substitution x^2 = z$$

$$z^2 + 7942{,}7z - 94315895{,}4 = 0$$

$$z = -3971 + 10492 =$$

$$\Rightarrow x = 80{,}75 \vee x = -80{,}75$$

Der Bogen ist maximal 161,5 m breit.

Lösungsweg b:
Tangensteigung an der Nullstelle: f’(-80,75)= 6,74 =tan"   "=81,56°

Lösungsweg c:

Aufgabe 4: Umsatzfunktion

Bei der Produktion von x Produktionseinheiten entstehen einem Unternehmen die Gesamtkosten K(x) (in €). Diese können im Bereich $0 \le x \le 50$ mit der Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}044x^3 - 2x^2 + 50x + 600$ beschrieben werden. Jede Produktionseinheit wird für 60 € verkauft.

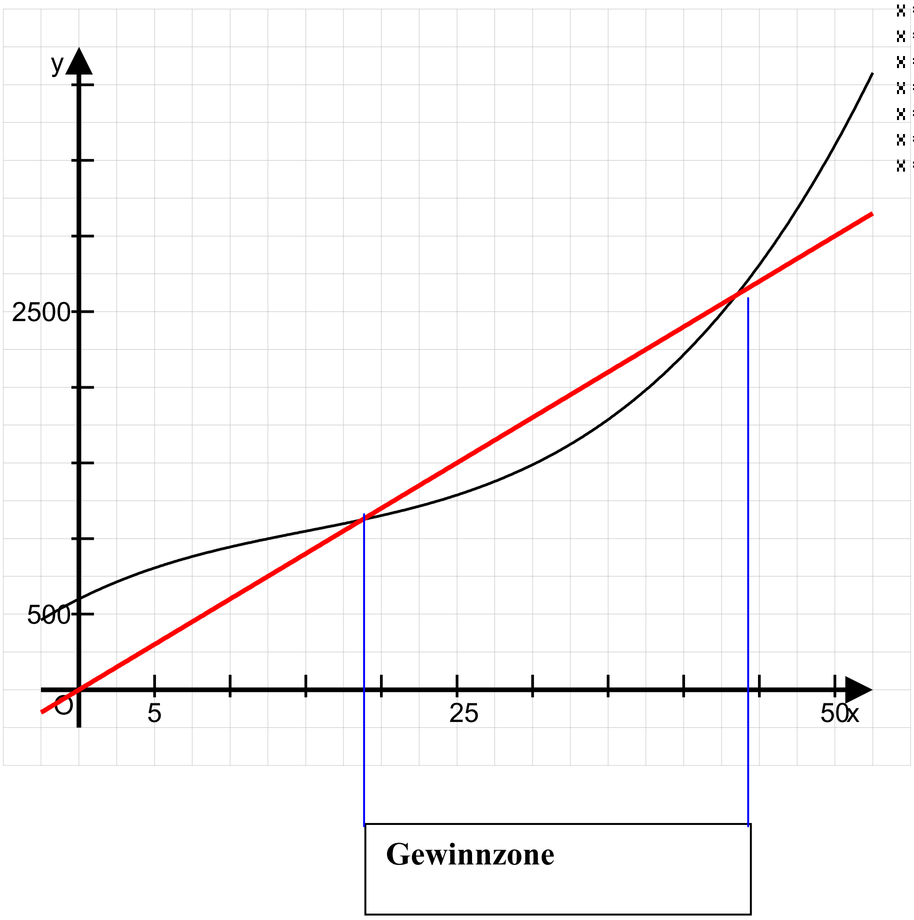
a) Stelle eine Umsatzfunktion U(x) auf, die den Umsatz bei x verkauften Produktionseinheiten beschreibt.
b) Zeichne die Kostenfunktion und die Umsatzfunktion in ein Koordinatensystem. Lies den Bereich ab, in dem das Unternehmen Gewinn macht.
c) Stelle eine Gewinnfunktion G(x) auf, die den Gewinn / Verlust bei x verkauften Produktionseinheiten beschreibt und berechne bei welcher Produktionszahl ($0 \le x \le 50$) der Gewinn am größten ist.

Lösung Aufgabe 4

a) $U(x) = 60x$

b)

x = 0	: f(x) = 600
x = 5	: f(x) = 805,5
x = 10	: f(x) = 944
x = 15	: f(x) = 1048,5
x = 20	: f(x) = 1152
x = 25	: f(x) = 1287,5
x = 30	: f(x) = 1488
x = 35	: f(x) = 1786,5
x = 40	: f(x) = 2216
x = 45	: f(x) = 2809,5
x = 50	: f(x) = 3600



c)
Gewinnfunktion:

$$G(x) = U(x) - K(x)$$
$$G(x) = 60x - (0{,}044x^3 - 2x^2 + 50x + 600)$$
$$G(x) = -0{,}044x^3 + 2x^2 + 10x - 600$$
$$G'(x) = -0{,}132x^2 + 4x + 10$$
$$G''(x) = -0{,}264x + 4$$
$$G''(-2{,}36) = 4{,}61 \succ 0 \Rightarrow Min.$$
$$G''(32{,}62) = -4{,}61 \prec 0 \Rightarrow Max.$$

$$-0{,}132x^2 + 4x + 10 = 0$$
$$x^2 - 30{,}3x - 75{,}76 = 0$$
$$x = 32{,}62 \vee x = -2{,}36$$

Der maximale Gewinn liegt bei 32,62 Produktionseinheiten und beträgt 327,1 €

Graph der Gewinnfunktion G