

Wiederholung: Ableitungsregeln

Seien f , g und h (im Definitionsbereich) differenzierbare, reelle Funktionen, n und a reelle Zahlen, dann gilt:

- **konstante Funktion:** $(a)' = 0$
- **Potenzregel** $(x^n)' = nx^{n-1}$, falls $n \neq 0$
- **Summenregel:** $(g+h)' = g'+h'$
- **Differenzenregel:** $(g-h)' = g'-h'$
- **Faktorregel:** $(a \cdot f)' = a \cdot f'$
- **Produktregel:** $(g \cdot h)' = g'h + h'g$

- **Quotientenregel:**
$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$$

- **Kettenregel:** $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Produktregel

Die **Produktregel** ist eine mathematische Regel, die in der Differentialrechnung Anwendung findet.

Wenn die Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ an der Stelle $x = x_a$ differenzierbar sind, so ist auch die Funktion f mit

an $f(x) := u(x) \cdot v(x)$ der Stelle $x = x_a$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x_a) = u'(x_a) \cdot v(x_a) + u(x_a) \cdot v'(x_a).$$

Kurz: $(uv)' = u'v + uv'$.

Anmerkung: Die Produktregel gilt auch für weitere Faktoren. So wäre

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Quotientenregel

Wenn die Funktionen u und v an der Stelle $x = x_a$ mit $v(x_a) \neq 0$ differenzierbar sind, dann ist auch die Funktion f mit

$$f(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)$$

an der Stelle x_a differenzierbar und es gilt:

$$\left(\frac{u(x_a)}{v(x_a)} \right)' = \left(\frac{u'(x_a) \cdot v(x_a) - v'(x_a) \cdot u(x_a)}{(v(x_a))^2} \right)$$

In Kurzschreibweise:

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \left(\frac{u'v - v'u}{v^2} \right)$$

Kettenregel

Die **Kettenregel** ist eine der Grundregeln der Differentialrechnung zur Ermittlung der Ableitung.

Sie findet Anwendung, wenn die gegebene Funktion sich aus einer Verkettung von Teilfunktionen zusammensetzt. Mit Hilfe der Kettenregel lässt sich also die Steigung einer Funktion bestimmen, deren Bestandteile beliebig ineinander verschachtelt sind. Die Ableitung (oder auch den Differenzialquotienten) der verketteten Funktion erhält man, indem man jede Verkettungsebene für sich ableitet und diese Ergebnisse miteinander multipliziert.

Die einfachste Verkettung besteht aus einer inneren Funktion v mit einer äußeren Funktion u :

$$f(x) = u(v(x))$$

Für deren Ableitung gilt:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

In Worten: Die Ableitung der Gesamtfunktion ist das Produkt aus innerer Ableitung v' mit der äußeren Ableitung u' .